2

CAPÍTULO

Suma y resta

La aritmética que se trabaja en la escuela primaria se ocupa principalmente de dos grandes campos de problemas: los que se resuelven con sumas y restas (campo aditivo) y los que se resuelven con multiplicaciones y divisiones (campo multiplicativo)

A lo largo de la escolaridad, los niños tienen que tener oportunidad de trabajar con problemas que comprometen distintos significados de una misma operación y con situaciones que permiten establecer relaciones entre las operaciones. Cada conjunto de problemas va a requerir no sólo que los alumnos establezcan nuevas relaciones y generen procedimientos de resolución, sino que también tendrán que aprender a expresar y validar matemáticamente estas relaciones, procedimientos y resultados.

¿Qué significa construir el sentido de las operaciones?

La respuesta es por demás compleja debido a que el sentido de un conocimiento varía, evoluciona, cambia de alumno a alumno, o para un mismo alumno, de un momento a otro, ante distintas situaciones.

Sin embargo, pese a que la construcción de sentido es dialéctica, móvil y sumamente sutil, es posible pensar, desde la enseñanza, qué sentidos de las operaciones se están propiciando a raíz de los problemas que se plantean a los alumnos, a raíz de los procedimientos que se asegura que dominen, a raíz de las representaciones que se movilizan...

Construir el sentido de las operaciones significa, sobre todo, ser capaz de reconocer los problemas que cada operación resuelve. Representa un largo proceso en el que los alumnos, a partir de enfrentar nuevos problemas, van enriqueciendo el sentido construido en situaciones anteriores. Si en un primer momento, por ejemplo, la suma está vinculada a un aumento de cantidades y la resta a una disminución, después estas operaciones se mostrarán útiles; por ejemplo, para conocer lo que se tenía antes de perder o ganar, invirtiendo en el terreno de las operaciones el sentido de la acción evocada.

La evolución de los sentidos de las operaciones se favorece trabajando en distintos planos: en el plano de la interpretación de las situaciones; en el plano de los procedimientos que utilizan los niños, así como de las formulaciones y escrituras que son capaces de producir e interpretar; en el plano de las propiedades que se ponen en juego y que en algún momento serán explicitadas; en el plano de las relaciones que pueden ser establecidas entre los distintos conocimientos producidos. Todos estos aspectos son constitutivos del sentido de las operaciones y requieren ser tomados como objeto de trabajo en su especificidad y en sus vinculaciones.

Dado que estamos hablando de aprendizajes que se desarrollan en tiempos largos sería muy conveniente que esos distintos sentidos (que se propician en la enseñanza) fueran objeto de trabajo entre los maestros de distintos grados, dentro de cada ciclo y en el conjunto de la escolaridad. Esto apunta a determinar, para cada grado, cuáles aspectos recién se están iniciando, para cuáles se buscará provocar una evolución firme en el terreno de los procedimientos, qué formas de escritura se aceptan, cuáles se presentan o incluso se exigen. En este sentido, para la comunicación entre maestros de distintos ciclos y grados, resulta insuficiente informar que se trabajó «la suma y la resta». Al contrario, resulta necesario precisar: ¿qué tipos de problemas se propusieron?; ¿cuáles procedimientos se aceptaban?; ¿cuáles recursos de cálculo se aseguró que todos dominen?; ¿qué formas de trabajo se implementaron?; ¿cuáles formas de representación se incorporaron?, etc.

En el capítulo anterior postulamos que la enseñanza tiene que ir provocando un interjuego entre situaciones abiertas, principalmente orientadas a promover la incorporación de los alumnos a la cultura matemática, y situaciones organizadas en secuencias —que articulan variados aspectos—. En el campo aritmético, la finalidad de estas secuencias, organizadas para períodos prolongados de trabajo, es favorecer la construcción del sentido de las operaciones.

La organización de las secuencias de enseñanza requiere articular:

– El planteo de problemas seleccionados para poner en juego distintos sentidos de las operaciones
– La producción y análisis de escrituras matemáticas en el marco de los problemas y procedimientos de resolución

– El análisis y mejoramiento de los procedimientos apoyados en el conocimiento del sistema de numeración y un dominio creciente de recursos de cálculo

Estas líneas son las que organizan la presentación de propuestas en este capítulo, en relación con las operaciones de suma y resta.

Distintos significados de la suma y de la resta

A lo largo del Primer Ciclo, así como en el inicio del Segundo Ciclo de la escuela primaria, es necesario asegurar que los alumnos trabajen enfrentando problemas de suma y resta correspondientes a distintos significados: agregar, avanzar, juntar, quitar, comparar, retroceder, etc., y también que aprendan a usar estas operaciones para conocer lo que cambió, lo que se tenía, lo que resulta después de varios cambios sucesivos, apropiándose del carácter de operaciones inversas (*la suma deshace lo que la resta hace y viceversa)*.

Los tipos de problema pueden clasificarse de diversos modos[1] y su complejidad varía (y puede ser variada por el docente) según:

– los números en juego;
– los tipos de magnitudes;
– el orden de presentación de las informaciones;
– las formas de representación.

No exponemos aquí una clasificación de la estructura de los problemas combinando las variables enunciadas, sino que iremos realizando comentarios en torno a los problemas y actividades seleccionadas. Con frecuencia decimos los grados de la escuela en que se plantea el trabajo en torno a una cierta clase de problemas. De todos modos, los diseños o documentos curriculares de cada provincia suelen incluir referencias al respecto. Y el trabajo en cada escuela debería producir mayores especificaciones. Es uno de los criterios

1. Véase, por ejemplo, Pena, M. (2005) «Los nuevos problemas». En: *El sentido de las operaciones a través de la resolución de problemas*. Aula. Montevideo.

a considerar, por ejemplo, en la selección de libros de texto, o al discutir los objetivos que definen la promoción de los alumnos de un ciclo a otro.

Con mucha frecuencia en Primer Grado se enseñan a los alumnos, tempranamente, las operaciones y las notaciones ($2 + 3 = 5$); a veces en paralelo con la presentación de los números, con la idea de que después los utilizarán para resolver pequeños problemas. La aparición de los problemas en ocasiones se retrasa tanto que es posible ver cuadernos de Primer Grado en los que hasta octubre o noviembre no hay ninguno. Las operaciones y las notaciones así enseñadas no se justifican más que a posteriori.

Al contrario, lo que estamos proponiendo es, desde el inicio, plantear a los alumnos problemas de reunión de dos o más colecciones, problemas de parte-todo, problemas relativos a transformaciones de una colección: agregar, repartir, duplicar; presentados en forma gráfica o con enunciados; apoyados en distintos soportes (colecciones presentes, evocadas, en pistas, calendarios, imágenes); para dar a los niños la oportunidad de resolverlos con los medios de los que dispongan o elaboren. Algunos de estos problemas (no en forma exhaustiva) se presentan a continuación, abordando después el problema de la producción de escrituras matemáticas y de evolución de los procedimientos.

Problemas para poner en juego los distintos significados

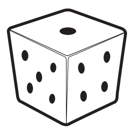
En el inicio del ciclo, los niños construyen los primeros sentidos de la suma y de la resta ligados a las acciones de reunir, agregar y quitar.

Los significados que los niños construyen, los procedimientos que despliegan están fuertemente ligados a los contextos en los que trabajan. En este sentido, cuando se incorporan por ejemplo situaciones ligadas a desplazamientos —avanzar y retroceder en un tablero, en el cuadro de números— los alumnos no las vinculan necesariamente con sumar y restar. Esta vinculación tiene que ser promovida por la enseñanza.

En el contexto de juegos de tablero, se pueden plantear problemas como los siguientes:

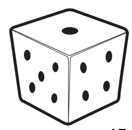
?

Walter está en el casillero 12 y le salió 3 en el dado.
¿A cuál casillero tiene que ir?



Habitualmente, en un juego de tablero, incluso los adultos, desplazamos nuestras fichas uno a uno, tantos lugares como indica el dado (sin sumar esos puntos al número del último casillero). Un problema como el presentado, con apoyo en el contexto pero «despegándose» del mismo, promueve la utilización de los números como «recurso para anticipar»: trabajando en el nivel de los números, anticipar el número al que hay que ir sin realizarlo efectivamente. Estamos hablando del pasaje del conteo al cálculo. Contar tres números a partir de 12 es un avance en esa dirección y se llama sobreconteo: 12...13, 14, 15. El trabajo sobre la serie numérica, el conteo de a 2, de a 3, va a favorecer que pueda ser resuelto en el nivel del cálculo: 12 + 3 = 15.

• ***Problemas de complemento***



? Julia está en el casillero 8 y quiere llegar al casillero 12 porque hay premio. ¿Cuánto le tiene que salir en el dado para caer justo?

Este problema introduce un nuevo sentido: completar, averiguar lo que falta.

Inicialmente se espera que sea resuelto por conteo (en una pista contar los casilleros), o sobreconteo (contar desde 8 hasta 12), o vinculados a la suma (¿8 más cuánto es 12?) sin requerir su expresión en un cálculo.

? Paulina invitó para su cumpleaños a 12 amiguitos. Ya llegaron 6. ¿Cuántos falta que lleguen?

Para resolverlo los alumnos pueden representar los que llegaron y dibujar los que faltan hasta completar 12, o sobrecontar (desde 6 hasta 12), vincularlo a la suma (¿6 más cuánto es 12?, apoyándose en el conocimiento de que 6 + 6 = 12).

?

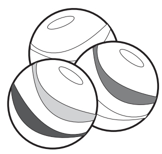
De los doce amiguitos de Paulina 8 son nenas.
¿Cuántos amiguitos de Paulina son varones?

Estos problemas, así como algunos juegos tendientes a favorecer el dominio del repertorio aditivo, pueden resultar un contexto adecuado para que los alumnos puedan otorgar sentido[2] a la escritura **a + ... = c**, aunque al principio no se comprometa la relación con «c - a =...».

Los problemas de complemento, ligados a un cierto dominio del repertorio aditivo, empiezan a ser tratados como la búsqueda del término desconocido de una suma.

• ***Problemas de comparación***

En el curso de Primer Grado, con frecuencia los niños tienen que comparar colecciones y establecer cuál tiene mayor cantidad de elementos. A medida que desarrollan su conocimiento sobre los números, pueden determinar cuál es mayor sin necesidad de recurrir a las colecciones, e incluso calcular la diferencia.



?

Lucas tiene 20 bolitas. Pedro tiene 22 bolitas.
¿Quién de los dos tiene más?

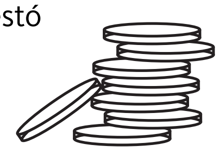
Por ejemplo, «*22 es más que 20 porque viene después*» (en la serie numérica), o «*22 es mayor porque tiene 2 más*».

A partir de una comparación, se puede plantear un problema de igualar, como el siguiente:

2. El trabajo sobre las escrituras y las relaciones entre las operaciones se retoma en otro apartado de este capítulo.

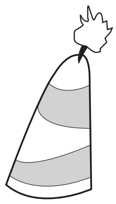
?

El abuelo le dio $ 20 a Inés y $ 25 a Juana. Inés protestó y quiere tener lo mismo que Juana. ¿Cuántos pesos le tiene que dar el abuelo a Inés para que las dos nietas tengan igual cantidad de dinero?



Los problemas de comparación resultan más complejos cuando se trata de medir la diferencia entre las dos colecciones o entre dos números, como en los siguientes.

Aunque en Primer Grado se pueden plantear, constituyen un asunto de trabajo propio de Segundo Grado.



?

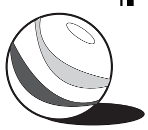
Emiliano tiene 18 años y su hermano Pablo tiene 12 años. ¿Cuántos años le lleva Emiliano a Pablo?

El equipo rojo hizo 68 puntos y el equipo azul hizo 50 puntos. ¿Por cuántos puntos le ganó el equipo rojo al equipo azul?

?

?

Lucas tiene 15 bolitas. Pedro tiene 10 bolitas. ¿Cuántas bolitas más tiene Lucas que Pedro?



Para muchos niños resulta trabajoso interpretar la relación «...más que...», y puede ser beneficioso que reconstruyan el problema con su propio lenguaje. Recordamos niños diciendo: «*Te pregunta en cuánto le gana*»; «*Te dice en cuánto lo pasa*». Es importante que los niños se representen la situación y eventualmente realicen la comparación (establecer quién tiene más para poder involucrarse con establecer la diferencia).

Los tres problemas anteriores involucran distintos contextos (años, puntos, bolitas). Se procura que, a lo largo del trabajo (no de una vez), los alumnos aprendan a interpretar ciertas expresiones, modos de preguntar propios de cada contexto. Se trata de que puedan establecer relaciones entre el lenguaje propio de la vida cotidiana y los modos de formular los enunciados para el trabajo en clase.

En el marco de problemas de comparación se pueden generar otros, variando lo que se sabe y lo que se pregunta, por ejemplo:

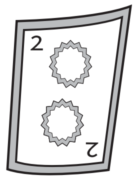
Conociendo la cantidad de elementos de una colección y su diferencia con otra, se puede plantear averiguar la cantidad de elementos de la segunda.

Germán juntó 30 caracoles. Su primo juntó diez caracoles menos. ¿Cuántos caracoles juntó el primo?

• ***Problemas en los que algo cambió***

Como hemos dicho, los primeros sentidos de la suma y de la resta se vinculan con cambios: una cantidad aumentó o disminuyó. Los niños resuelven estos problemas actuando en el mismo sentido que la transformación.

Nuevos problemas van a desafiarlos para tener que averiguar lo que cambió (la transformación) o lo que había antes del cambio.



Susana tenía 12 cartas, después de jugar un partido con Federico tiene 10 cartas. ¿Ha ganado o ha perdido? ¿Cuántas cartas?

Lucrecia ganó 8 cartas en el partido, ahora tiene 18. ¿Cuántas cartas tenía antes de jugar?

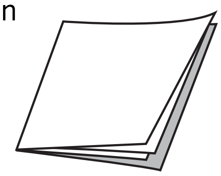
Sara perdió 7 cartas jugando con Julio, ahora tiene 3. ¿Cuántas cartas tenía antes de jugar?

Los números seleccionados facilitan su resolución mediante cálculo mental, apoyados en el dominio del repertorio aditivo o en el conocimiento del sistema de numeración.

Esto también es posible en los siguientes problemas, pero se involucran cantidades que, en muchos casos, pueden requerir otro tipo de recurso de cálculo.

? Marcos y Andrés tienen un puesto de diarios y se turnan para atenderlo. Marcos vendió 214 diarios a la mañana. Andrés atendió el puesto por la tarde y al final del día habían vendido 320 diarios. ¿Cuántos diarios vendieron por la tarde?

? Las revistas que no se venden se pueden devolver. Vendieron 80 ejemplares de «Humor» y devolvieron 45 ejemplares. ¿Cuántos ejemplares de «Humor» les habían dado para vender?



En el primer problema, se conoce el estado inicial y el estado final. La transformación ha sido positiva. El problema puede ser resuelto por complemento (214 + ... = 320) o por resta (320 - 214 = ...).

El trabajo tiene que orientarse a que los alumnos sepan que la resta es la herramienta que permite establecer la diferencia entre dos números, aunque elijan resolver el problema por complemento porque los números intervinientes lo tornan fácil[3].

En el segundo problema se conoce la transformación (que fue negativa) y el estado final. Para conocer el estado inicial es necesario «deshacer» la transformación negativa, y esto compromete la relación entre la suma y la resta.

Múltiples situaciones de suma y resta relativas a sus distintos significados pueden plantearse en el contexto del dinero, a raíz de compras, listas de precios, tickets

3. Esto se retoma en el Capítulo 4, al analizar el juego «Lo más cerca posible».

en los que hay que tratar o completar información, etc. Este contexto permite, además, un rico trabajo que vincula numeración y operaciones.

Los siguientes problemas, que se pueden trabajar en Tercer o Cuarto Grado, tienen mayor complejidad porque hay que componer relaciones y porque su resolución involucra varios pasos.

?

Mariela y Nuria decidieron regalarle un conjunto de remera y pantalón a su amiga Lucila. Mariela compró el pantalón y le costó $ 86. Nuria compró la remera y le costó $ 40. ¿Cómo pueden arreglar las cuentas para compartir el gasto? ¿Quién le tiene que dar dinero a quién? ¿Cuánto?

?

Arreglando cuentas

En cada caso completá lo que dice el personaje.

• Situación 1

Javier: *Mañana te voy a devolver los $ 90 que me prestaste.*
Lucho: *Bueno, pero acordate que compraste para mí el libro de inglés que te costó $ 48.*
Javier: *Ah, entonces te tengo que devolver* ☐

• Situación 2

Cuatro amigos organizaron un asado para 10 personas y el gasto se va a repartir entre todos los participantes.

Pedro: *Hice las cuentas y entre todo gastamos $ 180.*
Inés: *Entonces, ¿cuánto tiene que poner cada uno?*
Pedro: *Cada uno tiene que poner* ☐
Lucho: *Yo gasté $ 89 en la carne.*
Pedro: *Te tenemos que dar* ☐
Inés: *Gasté $ 36 en las verduras, con eso pongo por Juli y por mí ¿está bien?*
Pedro: ☐

Actividades para promover la producción y el análisis de escrituras matemáticas

Hemos propuesto iniciar la enseñanza de la suma y de la resta planteando problemas que los niños resuelven apelando a diversos recursos. En este marco se propone apoyar el pasaje del conteo al cálculo.

Respecto de las notaciones, la idea es que la escritura matemática aparezca como herramienta para expresar algo que los niños ya saben hacer. Es necesario que los alumnos ya tengan una representación de la situación y del significado de lo que obtienen para que puedan otorgarle significado a la escritura y enfrentar las dificultades específicas del aprendizaje de la representación escrita.

Es importante que los alumnos trabajen en situaciones en las que necesiten usar los números y empiecen a poner en juego algunos procedimientos mentales de resolución, antes de enseñarles la forma habitual de anotarlos.

Hemos presentado en distintas publicaciones[4] una secuencia de actividades denominada «El juego de la caja». En la misma se presenta una situación de transformación de una cantidad inicial, ya sea agregando o quitando elementos. Delante de los niños se coloca en una caja una cierta cantidad de elementos, contándolos y anunciando la cantidad puesta. Luego un niño pasa a poner otra cantidad, también anunciándolo. La tarea para los alumnos es averiguar, sin abrirla, la cantidad de elementos que hay en la caja.

Del mismo modo, se organizan situaciones de quitar una cantidad de lo que se había puesto en la caja. El objetivo esencial de la actividad es la búsqueda de un procedimiento para encontrar el número de elementos de la caja. Se promueve que lo establezcan y que expliquen cómo están seguros, sin necesidad de abrir la caja y contar dichos elementos. Esto último corresponde a una comprobación empírica. Se solicita a los niños buscar argumentos y se los desafía sobre la necesidad o no de abrir la caja para estar seguros.

Después de una sostenida experiencia en el marco de la situación, se plantea un nuevo desafío: en el equipo

4. Véase, por ejemplo, «Los niños, los maestros y los números», documento disponible en www.buenosaires.gov.ar, en la sección Educación, Documentos Curriculares.

arman un juego de la caja (poner y poner o poner y sacar), y tienen que escribir un mensaje a otro equipo para que, con ese mensaje, los niños del otro equipo puedan averiguar la cantidad de elementos que hay en la caja sin abrirla. Esta situación demanda a los alumnos la formulación del sentido de sus acciones, ligadas al hecho de agregar o quitar elementos. Se trabaja sobre estos mensajes (para un análisis al respecto remitimos a la publicación antes mencionada) y es en este marco que se abordan las escrituras «a + b» y «a - b», cuyo primer significado está dado por la diferenciación entre los dos tipos de acciones evocadas.

Como hemos planteado al considerar los problemas de complemento, y como retomaremos al considerar actividades tendientes al dominio del repertorio aditivo, múltiples contextos permitirán otorgar significado a otra escritura: «a + ... = c».

A modo de ejemplo de articulación, presentamos algunas actividades que permiten poner en funcionamiento la práctica y el sentido de buscar el término desconocido de una suma (aunque por su carácter se incorporan mayoritariamente en el apartado siguiente).

Por ejemplo:

!

Sumar 10

Materiales: un mazo con cartas del 1 al 9 por jugador
(o un mazo con cartas de 10 a 90 para jugar a **Sumar 100**).

Reglas:
Juegan dos o tres jugadores.
Cada uno aporta sus cartas.
Las mezclan y las acomodan boca abajo en filas y columnas.
En su turno, cada jugador da vuelta primero una carta y después otra.
Si entre ambas suman 10, se las lleva. Si no suman 10 las vuelve a poner boca abajo en su lugar y el turno pasa al otro compañero.
Cuando no quedan más cartas, gana el jugador que logró levantar más cartas.

Actividad individual:
Completá la tabla

Cuando la primera carta es	Cuando la segunda carta es
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

Como hemos dicho, estas actividades pueden resultar un contexto adecuado para que los alumnos puedan otorgar sentido a la escritura **a + ... = c**, aunque al principio no se comprometa la relación con «c - a = ...».

En este caso, se puede presentar la escritura **4+... = 10** relacionando el anticipar cuál carta permite, junto a la que ya se tiene, reunir 10, con buscar el número que, sumado a otro conocido, da 10.

> **!** En cada cuadrito completá con lo que hay que agregar para formar 10
>
> 3 + ☐ = 10 8 + ☐ = 10 4 + ☐ = 10

Otro ejemplo: a partir de «saltos en el cuadro de números»[5], el lugar vacío de la suma se vincula a ¿cuántos saltos de a diez tengo que dar para ir de un número a otro?

> **!** **Completá**
>
> 7 + ☐ = 17 8 + ☐ = 10
> 7 + ☐ = 27 8 + ☐ = 20
> 7 + ☐ = 37 8 + ☐ = 30
> 7 + ☐ = 47 8 + ☐ = 40
> 7 + ☐ = 57 8 + ☐ = 50
>
> ¿Descubriste algo que te hizo más fácil completar algunos de los cálculos?

Estas actividades permiten que los alumnos aprendan a vincular ciertos datos (conocer un número y el resultado de su suma con otro; conocer el número de partida y el número de llegada), ciertas acciones (buscar el complemento, anticipar y cuantificar desplazamientos), con conocimientos (pares de números

5. Ver referencias al trabajo con escalas y cuadro de números en el Capítulo 3. Numeración.

que sumados dan 10; el número de dieces que hay en un número de dos cifras) y con formas de representación, en particular, escrituras matemáticas que les permiten expresar la relación entre los datos y cierta forma de tratamiento de los mismos.

Hemos planteado un ejemplo de actividad que puede resultar un contexto adecuado para hacer aparecer, presentar la escritura «a + ... = c».

En una clase en la que sólo «viven» las escrituras «a + b = c» y «a - b = c», los alumnos no pueden saber que otras formas de escritura son legítimas, están autorizadas. Quienes tienen conocimiento experto, conocen la utilidad de la resta para un conjunto de problemas (que precisaremos) más allá de aquellas en las que disminuyen cantidades; pero cuando los niños están recién empezando a articular estas relaciones, necesitan construir medios para expresarlas que puedan articularse con las acciones y los recursos que efectivamente utilizan.

Ante un problema como el siguiente:

> ? En Segundo Grado hay 20 chicos, 8 chicos ya empezaron el segundo cuaderno. ¿Cuántos chicos no empezaron todavía un nuevo cuaderno?

Un alumno puede buscar la solución pensando cuánto hay entre 8 y 20 y puede resolverlo contando de a uno o a saltos: 8 y 2, 10, y 10 más, 20. Para producir la respuesta, tiene que reunir los dos saltos (2 y 10) para establecer cuántos son los alumnos que todavía no empezaron un cuaderno nuevo.

Si se promueve su expresión en un cálculo pueden aparecer:

$$8 + 2 + 10 = 20 \text{ ó } 8 + 12 = 20$$

Para que los niños puedan establecer una relación entre buscar el complemento agregando y la resta, es necesario un largo trabajo. Durante un tiempo prolongado van a permanecer en el terreno de la suma, y resulta importante que puedan producir expresiones que se vinculan con sus procedimientos.

Hemos planteado que no es conveniente presionar prematuramente por la expresión en cálculos de la resolución de problemas (en Primer Grado), pero, hacia fines de Primero y a lo largo de Segundo Grado, sí consideramos un objetivo a lograr que los alumnos, para los problemas de suma y resta, produzcan una escritura matemática que ordene los datos y lo que hay que averiguar.

Así, por ejemplo, a inicios de Segundo Grado, se pueden plantear problemas como los siguientes. Luego conducir una puesta en común en la que se presenten los distintos cálculos; se analice y acepte que para un problema más de un cálculo puede ser adecuado y se empiecen a establecer relaciones entre los mismos.

?

Para cada problema, escribí el o los cálculos que pensaste y la respuesta

Juanjo y su papá pescaron 16 peces pero tuvieron que volver 6 al agua porque eran muy pequeñitos. ¿Cuántos peces les quedaron?

En el estacionamiento hay lugar para 24 autos. En este momento hay 15 autos estacionados. ¿Para cuántos autos queda lugar?

En la fiesta, 5 nenes se pusieron sombrero y 9 nenes no se pusieron. ¿Cuántos nenes hay?

En un videojuego hay que atrapar 20 mariposas. Juli atrapó 12 y se le está acabando el tiempo. ¿Cuántas mariposas le falta atrapar?

Para el segundo problema pueden proponer «24 - 15 = 9» ó «15 + 9 = 24». Aunque esta última escritura tiene la «incomodidad» de que lo que se busca está «dentro» del cálculo y no después del igual, tiene la ventaja de que se relaciona mejor con la resolución por complemento. Es importante que los alumnos no sólo presenten los cálculos, sino que también expliquen qué usaron para responder. Concretamente, que «lean» el significado de cada número en el contexto del problema: qué son los 15 (los autos estacionados), los 24 (los autos que entran en el estacionamiento), los 9 (los que todavía pueden ser estacionados); y que puedan reconstruir lo que han hecho.

Un trabajo como el descrito puede plantearse para problemas como los siguientes, propuestos para Tercer Grado:

?

Problemas para resolver y analizar las soluciones y respuestas

Para el sábado Catalina tiene que terminar de ponerles el broche a los bolsos. Ya les puso broche a 75 y le falta ponérselo a 95 bolsos para tener todo listo. ¿Cuántos son los bolsos que Catalina tiene que entregar el sábado?

A los monederos Catalina les pone el cierre y un ganchito para colgarlos. La semana pasada terminó muchos y esta semana terminó 120 monederos. Tiene listos para entregar 250 monederos. ¿Cuántos monederos terminó la semana pasada?

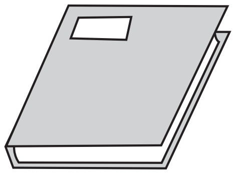
Los ganchitos de los monederos vienen en bolsas de a 100 ganchitos. Catalina usó 3 bolsas pero le sobraron ganchitos. ¿Cuántos ganchitos le sobraron?

El desafío de que los niños se construyan una representación de la situación se sostiene en los distintos grados: ¿Qué sucede? ¿Quiénes intervienen? ¿Qué se sabe? ¿Qué hay que averiguar? Cuando empiezan a imaginar cómo resolverlo plantean posibles cálculos. De alguna manera, con sus ensayos, los niños «se envían mensajes a sí mismos», y la idea esencial del trabajo es que revisen sus ideas en el contexto del problema y analicen el sentido de las respuestas. ¿Puede ser? ¿Es una respuesta razonable?

Una de las herramientas con que cuenta el maestro para favorecer estas actitudes y capacidades en los alumnos consiste en organizar la interacción entre los alumnos en torno a la tarea. Así, por ejemplo, para problemas como los siguientes, claramente distintos unos de otros y que involucran distintos significados de la suma y de la resta, podría proponerse que los alumnos los resuelvan en parejas. Tener que explicar a un compañero lo que se está pensando puede favorecer la toma de conciencia de las propias ideas, incluso cuándo son erróneas. El esfuerzo de interpretar lo que otro hace o dice también puede favorecer la toma de conciencia, la comprensión.

En particular, la solicitud de escribir los cálculos que realicen puede convertirse en una demanda de intercambio potente para construir sentido.

El maestro acompaña el trabajo de las parejas, se acerca para asegurar que ambos trabajen, que acepten compartir la resolución, que se animen a discutir y también que se esfuercen en llegar a acuerdos. Esta «recorrida» también le puede permitir identificar las producciones de los alumnos que resultan más significativas para someter a análisis en una puesta en común. No se trata de que cada una de las parejas exponga lo que ha hecho, en una larga y tediosa enumeración. Se trata de que todos los alumnos compartan el análisis de los casos seleccionados por el maestro porque permiten confrontar, comparar, conocer modos eficaces de resolver y modos claros de comunicar. Se trata de dar oportunidad para que los alumnos puedan reconocer si se han equivocado y por qué, o que puedan ver que hay distintos modos y que algunos pueden ser mejores que otros.



La Biblioteca Municipal

Resuelvan los problemas, escriban los cálculos que realicen y las respuestas.

Como la Biblioteca Municipal ha ampliado los servicios que ofrece y el horario de atención, ahora tiene nuevos socios. Durante este año se asociaron 378 personas y actualmente tiene 1.512 socios. ¿Cuántos socios tenían el año pasado antes de su campaña de renovación?

De los 1.512 socios, 900 son adultos. ¿Cuántos socios son niños?

Actualmente, en la biblioteca se pueden ver y llevar en préstamo videos sobre diversos temas. El año pasado contaban con 40 títulos y ahora ofrecen 216. ¿Cuántos videos incorporaron este año?

En el mes de julio se prestaron 715 libros y en el mes de agosto, 1.050. ¿En cuánto aumentó la cantidad de libros prestados de un mes a otro?

La biblioteca celebra este año su vigésimo aniversario. ¿En que año fue creada?

Además del análisis en clase de la producción de los alumnos, se pueden proponer actividades cuya finalidad es aceptar o rechazar ciertas escrituras matemáticas dadas según correspondan o no al problema.

? Aceptar o rechazar

Resuelvan el siguiente problema y escriban la respuesta

Los alumnos de Tercer Grado A y Tercer Grado B van a realizar una excursión a la reserva. Son 60 niños y los van a acompañar 4 maestros. La Secretaria está juntando las autorizaciones de los padres; ya recibió 45 autorizaciones. ¿Cuántas autorizaciones falta que lleguen?

Con los números de un problema se pueden escribir distintos cálculos. Sin embargo, no cualquiera de los cálculos corresponde al problema.
¿Cuál de los siguientes cálculos no corresponde al problema?

60 + 45 = ☐ 60 - 45 = ☐ 45 + ☐ = 60

Expliquen en el equipo por qué aceptan unos cálculos y rechazan otro.

Las mismas consignas se pueden plantear para el siguiente problema:

? Aceptar o rechazar

Para el casamiento de Mariela y Andrés, los amigos juntaron plata para hacerle el regalo. Le compraron un lavarropas que costó $ 560 y le dieron a la pareja $ 140 que van a usar en su viaje de luna de miel. ¿Cuánta plata habían logrado juntar los amigos?

¿Cuál de los siguientes cálculos no corresponde al problema? Marcalo.

560 + 140 = ☐ 560 - 140 = ☐ ☐ - 560 = 140

En las actividades presentadas, los alumnos tienen que interpretar escrituras en el marco de problemas. El propósito último de las mismas es que los alumnos dispongan de medios para poder pensar y formular las relaciones entre los datos, así como articular recursos de cálculos según los números y las relaciones establecidas.

Aún bajo el convencimiento de la riqueza de los intercambios entre los alumnos, sabemos que el maestro tiene la responsabilidad de lograr que cada alumno realice las adquisiciones buscadas. La siguiente actividad, en la que los alumnos tienen que vincular diversas preguntas con cálculos que les pueden servir para resolverlas, podría plantearse individualmente.

?

Para cada pregunta elegí el o los cálculos que te sirven para poder responderla

Valentín tiene 50 cartas de Superhéroes, pero 10 de ellas están repetidas.
Lucas tiene 65 cartas de Superhéroes, pero 12 de ellas están repetidas.

- ¿Cuántas cartas tiene Valentín, sin contar las repetidas?
- ¿Cuántas cartas tiene Lucas, sin contar las repetidas?
- ¿Cuántas cartas de Superhéroes tienen entre los dos?
- ¿Cuántas cartas más tiene Lucas que Valentín?
- ¿Cuántas cartas le faltan a Valentín para tener tantas como Lucas?

65 + 50 = $\boxed{}$ 65 - 50 = $\boxed{}$ 50 + $\boxed{}$ = 65

50 - 10 = $\boxed{}$ 65 - 12 = $\boxed{}$ 10 + 12 = $\boxed{}$ 12 - 10 = $\boxed{}$

La actividad de inventar problemas adecuados a unas condiciones dadas exige poner en juego las relaciones entre los datos, y puede ser fuente de intercambios que favorecen la organización mental de «clases de problemas». En este caso se propone a raíz de cálculos.

!

Inventar problemas

En cada caso inventen un problema que se puede resolver con ese cálculo.

$80 + \square = 120$ $352 - 200 = \square$ $25 + 25 - 3 = \square$

Comparen los problemas que inventaron y vean si todos se resuelven con ese cálculo.

Es una de las vías para apoyar la conceptualización de una operación: muchas situaciones pueden ser representadas por el mismo modelo matemático.

Procedimientos y recursos de cálculo en el campo aditivo

En el primer capítulo de este libro, relativo a «Problemas, sentidos, procedimientos y escrituras», se proponen articulaciones entre líneas de trabajo que se han retomado como organizadores del presente capítulo. Una de ellas, el análisis de procedimientos puestos en juego y su mejoramiento, apoyado en el conocimiento del sistema de numeración[6] y en un dominio creciente de recursos de cálculo, constituye el objeto de esta última parte.

Como hemos dicho, no es suficiente plantear buenos problemas y dejar que los niños los resuelvan con los recursos con los que cuentan «*no importa cuáles sean*». Al contrario, es una responsabilidad de la enseñanza provocar la evolución de los procedimientos puestos en juego por los alumnos y el acrecentamiento de los recursos de cálculo de los que disponen.

Hemos planteado, en torno a pequeños ejemplos, las razones por las que la enseñanza debe comprometerse con favorecer que los alumnos puedan, progresivamente, abandonar el recurso a la representación

6. Para los aspectos específicos del trabajo en torno a la numeración ver Capítulo 3 del presente libro.

gráfica de las colecciones y el conteo, a favor del trabajo en el nivel del cálculo y de la representación matemática de la situación.

Ya en el terreno del cálculo, se promueve que los alumnos construyan procedimientos personales para dar respuesta a las situaciones. La construcción de procedimientos personales consiste en el despliegue de diferentes caminos a partir de decisiones que los alumnos van tomando durante la resolución. Requieren de un tipo de trabajo en la clase que promueva la búsqueda, el ensayo, el intercambio y difusión de las ideas, la revisión.

Estos procedimientos que se ponen en juego para cálculos particulares, no dependen de una técnica, pero sí requieren disponer de conocimientos en los cuáles apoyarse.

Así, tempranamente, para resolver «6 + 7», el trabajo se orienta a que los alumnos lo resuelvan apoyándose en conocimientos disponibles o en elaboración: por ejemplo pensándolo como «6 + 6 + 1» (conocimiento de los dobles) o como «6 + 4 + 3» (conocimiento de los pares de números que sumados dan 10 y del comportamiento del sistema de numeración «10 + 3 = 13»).

Que, del mismo modo, para resolver «28 + 15», puedan apoyarse en la descomposición aditiva «20 + 8 + 10 + 5», reunir las decenas y resolver «8 + 5», o pensar el cálculo como «28 + 2 + 13», produciendo distintas expresiones de un mismo número de modo de facilitar su suma (completamiento a la decena más próxima).

Por ello, a la vez que la búsqueda e intercambio de maneras de resolver, es necesaria la sistematización de un conjunto de resultados que permita la construcción progresiva de un repertorio de sumas y restas (disponibles en memoria o fácilmente reconstruibles a partir de aquellos memorizados), y su extensión a los múltiplos de 10, 100, 1000.

Además de los procedimientos personales y la construcción de repertorios, tiene que considerarse la adquisición de técnicas.

Como hemos dicho en la Introducción, a lo largo de la historia se construyeron instrumentos culturales; en este caso nos referimos a los algoritmos convencionales, cuyo valor proviene, precisamente, de que son un conjunto de pasos fijos, aplicables sin atender la particularidad de los números involucrados y que convierten una tarea compleja en una sucesión de tareas menores. Esta tarea compleja, desde el siglo pasado, puede realizarse con un instrumento tecnológico: la calculadora (que encuentra resultados en forma muy veloz).

En la escuela, progresivamente, se incorporan como contenidos no sólo el aprendizaje de los algoritmos, sino también el aprendizaje de la utilización de la calculadora, incluyendo, en ambos casos, el problema del control sobre procesos y resultados.

¿Cuál es entonces el planteo?

El planteo es que el trabajo en el terreno del cálculo puede constituir una ocasión de realizar genuina actividad matemática: los alumnos pueden realizar análisis, tomar decisiones, discutir acerca de la validez de sus razonamientos, encontrar fundamentos para su hacer con el mismo espíritu con el que se promueve la resolución de problemas.

Se busca que, en este terreno, como en todo trabajo matemático, los alumnos se animen a abordar la tarea con los conocimientos disponibles, a explorar, a buscar por diferentes vías, a equivocarse y recomenzar, a comunicar sus ideas, a analizar la validez de los procedimientos y hacerse responsables por los resultados.

El propósito específico es que los alumnos dispongan de variados recursos de cálculo y que, en cada caso, aprendan a seleccionar tanto la modalidad de resolución que les parezca más adecuada (cálculo mental, algoritmos, calculadora), como los medios de control sobre los recursos utilizados. Por ejemplo, estimar el resultado mentalmente antes de usar la calculadora, o realizar un procedimiento personal y explorar con la calculadora si funciona con otros casos, etc.

Analizar cómo se diferencian y relacionan los diversos recursos de cálculo excede los límites de este apartado. Presentaremos los rasgos salientes tomando su descripción del documento «Cálculo mental con números naturales», producido por el equipo de la Dirección de Currícula del GCBA al que remitimos para un mayor desarrollo.

«La realización de algoritmos de papel y lápiz y la utilización de la calculadora constituyen el *cálculo algorítmico*

El *cálculo mental*, en cambio, hace referencia al conjunto de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan sin recurrir a un algoritmo preestablecido, para obtener resultados exactos o aproximados (Parra, 1994).»

«La distinción entre cálculo algorítmico y cálculo mental no reside en que el primero sea escrito y el segundo no se apoye en el uso de lápiz y papel. Como mencionamos, el cálculo algorítmico utiliza siempre la misma técnica para una operación dada, cualquiera sean los números. En cambio, cuando se propone un trabajo de cálculo mental, no se espera una única manera posible de proceder. La idea es instalar una práctica que requiera diferentes estrategias basadas en propiedades de la numeración decimal y de las operaciones. Al desplegar estas estrategias en una situación específica, se hace posible el análisis de las relaciones involucradas en las mismas.

Los algoritmos convencionales para las operaciones también apelan a propiedades de los números y de las operaciones, sólo que, una vez automatizados los mecanismos, como éstos son siempre iguales, es posible resolverlos sin tener en cuenta el sentido de las descomposiciones de los números y las operaciones parciales que se realizan.

En el cálculo mental, los números se tratan de manera global, sin considerar sus cifras aisladas como ocurre en los algoritmos convencionales. Esto, sumado al hecho de tener que poner en juego estrategias específicas en función de los números con los que se trabaja, habilita un mayor control de las propiedades que hacen válida la estrategia que se despliega.

Por otro lado, para que los alumnos produzcan estrategias de cálculo mental cada vez más elaboradas, tendrán que apoyarse tanto en el conocimiento de las propiedades de las operaciones y del sistema de numeración como en los resultados que deberán tener disponibles en su memoria.

El hecho de que el cálculo mental se distinga del cálculo algorítmico no supone que se oponga a él; todo lo contrario, los conocimientos construidos acerca de uno y otro tipo de cálculo se alimentan recíprocamente. Es finalidad de la escuela que los alumnos se apropien de los algoritmos convencionales para resolver las operaciones. Todo cálculo algorítmico contempla momentos de apelación al cálculo mental y se enriquece con sus aportes, para anticipar y controlar la magnitud del resultado, para comprender el sentido de los pasos del algoritmo convencional.

Los algoritmos convencionales constituyen técnicas de cálculo valiosas por la economía que procuran y por el alivio que supone la automatización de ciertos mecanismos. La riqueza del trabajo sobre el cálculo —mental y algorítmico— incluye el hecho de que los alumnos se ven confrontados a tener que decidir la estrategia más conveniente frente a cada situación en particular. Pensamos que el cálculo no algoritmizado abona la construcción de relaciones que permiten un aprendizaje de las cuentas convencionales basado en la comprensión de sus pasos, en un control de los resultados intermedios y finales que se obtienen. Al mismo tiempo, la finalidad de transmitir los algoritmos vinculados con las operaciones se inserta en el marco de la transmisión de un amplio abanico de recursos de cálculo y de su adecuación con las situaciones que enfrentan».[7]

7. Sadosvsky, P. (coord.), M. E. Quaranta y H. Ponce (2005) *Matemática Cálculo mental con números naturales*. Dirección de Currícula. Ministerio de Educación, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Disponible en: http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pdf/primaria/calculo_naturales_web.pdf

El tipo de trabajo que se propone no sólo les permite a los alumnos adquirir recursos de cálculo, sino que les permite utilizar los conocimientos construidos y construir nuevos conocimientos sobre los números y las operaciones. Todos los niños pueden realizar genuina actividad matemática. Las prácticas de reflexión y la experiencia de dominio del conocimiento no tienen por qué ser patrimonio de algunos.

Se requiere, una vez más, en torno a estas cuestiones, de un conjunto de articulaciones concebidas desde la enseñanza.

Para producir un mejoramiento de los procedimientos apoyados en el conocimiento del sistema de numeración y un dominio creciente de recursos de cálculo es necesario promover:

- la construcción de procedimientos personales para resolver sumas y restas;
- la sistematización de un conjunto de resultados que permite la construcción progresiva de un repertorio de sumas y restas disponibles en memoria o fácilmente reconstruibles a partir de aquellos resultados memorizados;
- la disponibilidad de diversos recursos de cálculo, ya sea mental o algorítmico;
- la elección de recursos de cálculo, ya sea para resolver, ya sea para estimar y controlar la utilización de otros recursos.

Actividades para favorecer la construcción del repertorio aditivo y de procedimientos para resolver sumas y restas

Pese a que la suma de dígitos está presente en las actividades desde el inicio de la escuela primaria, con frecuencia no se lleva adelante un trabajo que favorezca la memorización de estos resultados y esto representa una dificultad para muchos alumnos. Frecuentemente, vemos a los alumnos, cuando tienen que resolver una suma usando el algoritmo, usar los dedos para cada «pequeña» suma. O, cuando tienen que resolver una resta, no han aprendido en qué apoyarse y «vuelven» a palitos o marcas.

Los aprendizajes que están en juego en el cambio de ciclo resultan inabordables si todavía persisten procedimientos propios del inicio de la escolaridad.

Algunas sumas resultan más fáciles de memorizar (por ejemplo, la adición de dobles) y resultan un apoyo para resolver otras (por ejemplo «6 + 6» para resolver «6 + 7» ó «6 + 8»).

Debido a su vinculación con el funcionamiento del sistema de numeración, y porque resulta un apoyo fundamental para resolver diversos cálculos, es importante asegurar que los alumnos dispongan en memoria de los pares de números que sumados dan 10 (que permiten, a su vez, establecer con facilidad los complementos a 10).

Para favorecer la organización y memorización del repertorio aditivo, es importante promover que los alumnos identifiquen las sumas de las que ya han memorizado el resultado, establezcan relaciones entre los diferentes cálculos y aprendan a apoyarse en los resultados conocidos para resolver otros cálculos.

Por otro lado, es muy importante provocar una «convergencia» entre el dominio de la suma de dígitos y los aprendizajes relativos al sistema de numeración y su funcionamiento. Por ejemplo, se busca que puedan utilizar el conocimiento de que «6 + 4 = 10», para resolver mentalmente otras sumas y restas como «600 + 400»; «100 - 60»; «200 - 60»; «1200 - 40»; «1.000 - 400»; «140 + 60»; «124 + 36»; etcétera.

Se trata de utilizar las relaciones construidas para unos números extendiéndolas a otros, «haciendo pie» en la organización de la numeración escrita y en las propiedades de la suma y de la resta. Se busca que los alumnos lleguen a elaborar, difundir y establecer colectivamente un conjunto de reglas que facilitan los cálculos, las estimaciones, el control sobre diferentes resoluciones, etc. En otras palabras, las reglas utilizadas en estos cálculos se basan en la comprensión del funcionamiento del sistema de numeración y de las operaciones.

La construcción del repertorio aditivo se realiza a partir de la reflexión y la sistematización de los resultados obtenidos en las diferentes situaciones trabajadas.

Entre los cálculos y relaciones que este repertorio debería incluir[8], aquí trabajaremos los siguientes:

- Sumas de los números dígitos entre sí.
- Restas vinculadas con dichas sumas; por ejemplo, si «7 + 8 = 15», entonces «15 -8 = 7», etc.
- Diferentes descomposiciones de 10.
- Suma de decenas más dígitos.

8. Enumeraciones más completas pueden consultarse en Parra, C., (1994) «El cálculo mental en la escuela primaria». En: Parra, C. e I. Saiz (comps.) (1994) *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. Paidós. Buenos Aires. Tomado de Consejo General de Educación (1990) *Diseño curricular*. Corrientes. Al final de este capítulo se incluye el repertorio propuesto en el documento *Cálculo mental con números naturales*, *op. cit.*

– Extensión de los resultados conocidos para números de una cifra a los múltiplos de 10, 100, 1000. Por ejemplo, si «4 + 5 = 9», entonces «40 + 50 = 90»; o si «25 + 25 = 50», entonces «2.500 + 2.500 = 5000», etc.
– Sumas y restas de 10, 100, 1.000 o múltiplos de ellos a un número.

• ***La memorización de cálculos simples***

Se plantea un trabajo sobre el repertorio aditivo que consiste en ofrecer frecuentes oportunidades para que los niños obtengan y memoricen algunos resultados. Estas sumas trabajadas se van registrando en carteles en las aulas, cuyo completamiento testimonia el trabajo y actúa como referente para apelar a él, pero también para ir creando lo que en la clase «se sabe».

• ***Tabla de sumas***

Material: tabla para completar; una por alumno.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0											
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											

Actividades:
– Completar la tabla.
– Por parejas, «tomar» la tabla: uno de los alumnos pregunta una suma, el otro contesta sin mirar la tabla.

– Registrar en la tabla los resultados de sumas que «se saben de memoria». Puede proponerse que cada alumno lo registre por sí mismo, o que lo marque el compañero cuando, al «tomar» las sumas, la respuesta ha sido rápida.
– Identificar sumas de las que no disponen de los resultados en memoria.
– Intercambiar ideas sobre cómo usar lo que se sabe para resolver lo que no se sabe

La Tabla de sumas permite registrar todas las sumas de números menores o iguales a 10. Al ir completando los casilleros, los alumnos «descubren» regularidades que facilitan el completamiento. Por ejemplo: «*Los de acá son los de al lado con 1 más*», o «*Me salen los números en orden pero corridos uno*». Esta cierta facilidad para completarla, producto de la organización en tabla, no es, sin embargo, representativa de la disponibilidad de resultados de los cálculos considerados en forma discontinua («5 + 6», «7 + 8», etc.).

La actividad de «tomar la tabla» por parejas apunta, precisamente, a que los alumnos puedan distinguir los resultados que ya tienen disponibles respecto de los que no.

En este marco, y a raíz de otras actividades, hay que promover que los alumnos se apoyen en lo que saben (las «fáciles») para resolver lo que no tienen disponible (las «difíciles»). Por ejemplo, para «6 + 5» apoyarse en los dobles («5 + 5» ó «6 + 6», agregando 1 o sacando 1).

No se trata, sin embargo, de «enseñar» estas diferentes alternativas (como técnicas) ni de que cada alumno deba «conocerlas» todas. Se trata más bien de que cada uno encuentre sus maneras preferidas en el despliegue de alternativas que el conjunto de los alumnos es capaz de presentar. El recurso a la imitación es un recurso inteligente en la medida en que supone el reconocimiento del valor de lo propuesto por otro.

Para favorecer la «memoria» del trabajo es útil, ocasionalmente, recapitular. Por ejemplo: «El otro día se les ocurrieron varias maneras de resolver "8 + 5". ¿Cuáles eran?».

Además de un fuerte intercambio sobre estas «maneras», es pertinente plantearlo en forma individual, para que cada alumno tenga que tomar decisiones y poner en juego lo trabajado.

• ***Usar lo que se sabe...***

! Resolvé las siguientes sumas. Si para resolverlas utilizaste el resultado de un cálculo anotalo debajo.

5 + 6 = ☐   8 + 7 = ☐   7 + 5 = ☐   6 + 8= ☐

Más adelante, ya vinculado al conocimiento del sistema de numeración

50 + 60 = ☐   18 + 8 = ☐   70 + 50 = ☐   36 + 6= ☐

! **Sumas «vecinas»**

Saber que «10 + 10 = 20» puede servir para resolver «10 + 11», porque se agrega 1. A estas sumas, que se pueden resolver unas con ayuda de otras, podemos llamarlas «vecinas».
Para cada suma, anotá por lo menos otras tres «sumas vecinas»

8 + 8 = 16	
6 + 4 = 10	
15 + 15 = 30	
25 + 25 = 50	
17 + 3 = 20	

Resulta de interés que los alumnos pongan a funcionar relaciones entre números. Pese a que se propone como ejercicio individual, el docente puede recoger (o incorporar) los casos más interesantes, y proponer que sean retomados por la clase. Por ejemplo, si para «17 + 3 = 20», los alumnos se quedaron en las «vecindades» más próximas («17 + 4», «16 + 3»), el docente puede promover, por ejemplo, que se exploten otras «vecindades», como «27 + 3» o «170 + 30». Pedir que produzcan otras sumas «vecinas como esas» busca asegurar que establecen una relación y la ponen a funcionar.

• *A partir del resultado de una suma y conociendo un sumando, calcular el otro*

El siguiente juego se basa en «Saludos», juego propuesto por Kamii, en su emblemática obra *Los niños reinventan la aritmética*.

Lo mío, lo tuyo, lo nuestro

Cada jugador tiene como objetivo averiguar el número de su carta (lo mío), conociendo el número de la carta del contrario (lo tuyo) y la suma de los números de las dos cartas (lo nuestro). Se juega de a 3 niños.

Materiales: un mazo de cartas del 1 al 10 cada 3 niños.

Reglas

- Dos de los niños se sientan uno frente al otro, el tercero se ubica de modo de poder ver las cartas que le van a mostrar los otros dos.
- Los dos primeros se reparten el mazo y colocan sus cartas boca abajo.
- Simultáneamente cada uno de ellos levanta la carta superior de su montón y la muestra al otro (es decir cada uno ve la carta del contrario y no la propia)
- El tercero dice el resultado de sumar los números de ambas cartas.
- El primer jugador que averigua el número de su carta se queda con ambas cartas. Juegan hasta terminar el mazo. Gana el jugador que acumula mayor cantidad de cartas.
- Para un nuevo partido cambia quien dice la suma.

Este juego constituye un buen contexto para dar sentido a la búsqueda del término desconocido de una suma. Permaneciendo en dicho contexto, se puede proponer una ejercitación individual; por ejemplo, pedir que completen desde distintos roles en el juego:

Lo nuestro		**Lo nuestro**	
$\boxed{}$		13	
Lo mío	**Lo tuyo**	**Lo mío**	**Lo tuyo**
9	5	$\boxed{}$	6

Se puede generar un código para representar las cartas y para registrar la suma de ambas.

Podría constituir un sentido posible de la escritura de la suma con un término desconocido (que puede haberse utilizado en otro contexto y reinvertirse aquí).

7 +... = 15. También es adecuado para promover la vinculación con las restas, que es posible resolver apoyándose en los resultados de la suma: «7 + 8 = 15» ayuda a resolver «15 - 8» y «15 - 7».

• *Tipos de mazos*

Puede ser jugado con cartas de 1 a 5 o de 1 a 10 en Primer Grado. Retomarlo en Segundo Grado e incorporar luego un mazo de cartas del 10 al 90 para favorecer la extensión de los resultados conocidos de la suma de dígitos a la suma y resta de decenas.

Como hemos dicho, el juego con los dos tipos de mazo (1 a 9, 10 a 90) y su vinculación con la tabla de sumas, permite comprometer la extensión de los resultados conocidos para números de una cifra a los múltiplos de 10, 100, 1000 y las restas asociadas. Por ejemplo, si «4 + 5 = 9», entonces «40 + 50 = 90», «90 - 40 = 50» y «90 - 50 = 40».

• *Complemento a 10*

Por ser la base del sistema, conocer los pares de números que sumados dan 10 y ser capaz de establecer el complemento de los dígitos a 10, favorece en mucho la estructuración aritmética de la serie numérica. Como hemos visto, en la suma de dígitos, descomponer el segundo para completar la decena y sumar lo que queda es un excelente recurso («8 + 7» pensado como «8 + 2 + 5»).

Diversas actividades permiten su práctica, entre las cuales se incluye el siguiente juego:

¡A descartar!

Material: 4 mazos de cartas de 1 a 9 (constelaciones o cifras). Se juega de a dos. Cada jugador recibe diez cartas; el resto se pone en el mazo común, boca abajo.

Reglas:
Un jugador da vuelta una carta del mazo y la pone a la vista. El otro tiene que buscar entre sus cartas la que complementa a 10. Si tiene, la descarta junto con la del mazo. Si no tiene, pasa; la carta del mazo se coloca debajo, y da vuelta una nueva carta para su compañero. Gana el que se va de todas sus cartas.

A partir de las descomposiciones aditivas del número 10 y de las restas asociadas a ellas, se promueve su extensión a múltiplos de 10, de 100, etc.

Los pares de números que sumados dan diez pueden ayudar a resolver cálculos con los pares de números que sumados dan cien. Para cada par de números que sumados dan diez escribí los pares de números que sumados dan cien

9 + 1	90 + 10
8 + 2	
7 + 3	
6 + 4	
5 + 5	

Completá

40 + $\boxed{}$ = 100 70 + $\boxed{}$ = 100

80 + $\boxed{}$ = 100 90 + $\boxed{}$ = 100

Escribí en cada caso cálculos que el primero te ayuda a resolver.

7 + 5 = 12	70 + 50 = 120 12 - 5 = 7 12 - 7 = 5 120 - 70 = 50
9 + 5 = 14	
6 + 8 = 14	
8 + 7 = 15	

Sumas de muchos sumandos

Entre otras actividades se deben incluir las sumas de varios sumandos, y se propone que los alumnos busquen recursos para facilitar esas sumas[9]. Los recursos que los alumnos usan ponen en juego, implícitamente, las propiedades asociativa y conmutativa de la suma.

Estos son los puntos de Luciana en el juego de los palitos chinos:

5 10 1 10 1 5

5 1 10 1 10

¿Cuántos puntos obtuvo? ¿Cómo hiciste para averiguarlo?

En una actividad como la siguiente se promueve la suma de muchos sumandos para decenas enteras.

9. El acortamiento de sumas de muchos sumandos se trata en el Capitulo 4, sobre multiplicación.

Mayor, menor o igual a 100

Las siguientes tarjetas forman el mazo.

50 + 10 + 10 +10	40 + 40 + 40	90 + 9 + 1
50 + 50	30 + 30 + 30	90 + 90
50 + 50 + 50	30 + 30 + 30 + 10	70 +10 +10 +10
20 + 20 + 20 + 20	30 + 30 + 30 + 30	70 + 7
40 + 40	90 + 9	70 + 70

Reglas

- Se juega de a 3. Uno de los alumnos juega por *«menor que 100»*, otro por *«igual a 100»*, y el tercero, por *«mayor que 100»*.
- Las tarjetas se colocan boca abajo. Se da vuelta una; de acuerdo al resultado estimado o calculado exactamente, el alumno que considera que corresponde a su criterio (por ejemplo menor que 100) la pide. Si no lo hace, los demás pueden hacer «sopladita» y llevarse la carta.

Se puede proponer como ejercitación individual escribir sumas de muchos sumandos para cada columna.

Menor que 50	Igual a 50	Mayor que 50

- ***Restar mentalmente***

Como en otros casos se proponen cálculos como los siguientes para que los alumnos trabajen, el maestro observa y alienta la producción de los alumnos y organiza su presentación, análisis e identificación.

! Resolvé las siguientes restas:

60 - 30 = ☐ 90 - 50 = ☐

100 + 40 = ☐ 200 - 90 = ☐

Al relevar los puntos de apoyo, pueden aparecer el conocimiento de los dobles (30 + 30) para «60 - 30»; la suma de dígitos (5 + 4) y su extensión a decenas para «90 - 50»; de los complementos a 10 y su extensión a 100 («40 + 60», «90 + 10») para «100 - 40» y para «200 - 90». Es necesario que el maestro reconozca estos recursos, incluso que los nombre, y promueva que los alumnos los utilicen. Por ejemplo, diciendo explícitamente:

Para resolver restas, muchas veces usan lo que conocen de las sumas. Por ejemplo, saber que «40 + 60 = 100» les ha servido para resolver «100 - 40» y les sirve para resolver «100 - 60».

Para «poner a funcionar» esta idea puede proponer una actividad como la siguiente:

! Resolvé las siguientes restas. Si hay sumas que te ayudan a resolverla, escribilas al lado.

Restas	Sumas que ayudan
100 - 60 =	
120 - 60 =	
100 - 20 =	
100 - 80 =	
800 - 400 =	

Hemos ido mencionando, con ocasión de la construcción del repertorio, la promoción del desarrollo de procedimientos personales para resolver sumas y restas. Aquí lo sintetizamos al servicio de plantear su vinculación con el aprendizaje de los algoritmos.

El desarrollo de procedimientos mentales de resolución tiene un rol fundamental en el pasaje del conteo al cálculo, y constituye un objetivo fundamental de Primer y Segundo Grado.

Más tarde se favorecen los procedimientos que se apoyan en las propiedades del sistema de numeración.

Se busca que los alumnos de Primer y Segundo Grado, antes de aprender el algoritmo de la suma, puedan resolver «34 + 27» de distintos modos[10], por ejemplo:

34 + 27
33 + 7 + 20 + 1
34 + 6 + 21
50 + 11
54 + 7

Como hemos insistido, para que esto sea posible se deben, paralelamente, proponer actividades tendientes a que los alumnos dispongan en memoria de un conjunto de resultados (en este caso, suma de dígitos y suma de decenas enteras), porque sólo en esas condiciones los alumnos podrán elaborar diversos procedimientos y, cuando aprendan el algoritmo, tener algún control sobre el mismo.

10. Se promueve que los alumnos descompongan los números en otros que les facilitan el cálculo y puedan controlar lo que han hecho. En el proceso pueden realizar anotaciones, pero no se requiere producir la escritura de los pasos intermedios.

Para introducir el algoritmo

Se propone a los alumnos resolver un cálculo horizontal de diversos modos y luego se presenta el algoritmo para el mismo cálculo y se pide a los alumnos que traten de explicar cómo funciona.

$$\mathbf{35 + 28 =} \quad \begin{array}{r} {}^{1} \\ 35 \\ +\,28 \\ \hline 63 \end{array}$$

Es necesario provocar una puesta en común de las explicaciones que los alumnos intentan dar apoyados en diversos conocimientos.

Una vez establecido, se propone practicarlo haciendo cuentas o corrigiéndolas. Se busca propiciar una actividad de análisis y explicitación de errores que se considera parte del aprendizaje. Hacer conscientes errores posibles en el uso de una técnica forma parte de la apropiación de la misma, puede favorecer la explicitación de algunos de los conocimientos que la justifican y también puede permitir el desarrollo de algunos medios de control sobre su uso.

Por ejemplo ante:

$$\begin{array}{r} 43 \\ +\,57 \\ \hline 910 \end{array}$$

algunos alumnos pueden decir: «No puede dar tanto porque es parecido a sumar 50 más 50 que da 100», haciendo recurso a la estimación por redondeo.

Actividades para promover la disponibilidad de recursos de cálculo, su elección y control

Desde los primeros aprendizajes, se promueve que la matemática adquiera, entre otros sentidos, el de ser un medio, una herramienta para anticipar, prever y decidir. Hacer matemáticas es elaborar tales herramientas que permiten resolver verdaderos problemas, dedicarse a conocer estas herramientas y dominar su utilización para convertirlas en operatorias ante nuevos problemas. La enseñanza ha de crear las condiciones para una verdadera actividad intelectual de los alumnos. Como hemos insistido, ante un problema es importante promover que los alumnos traten de representarse la situación, se planteen alternativas, busquen entre sus recursos, ensayen, vean si los conocimientos que están utilizando son pertinentes y si los resultados son razonables. Cuando ya han planteado un cálculo, o ante un cálculo propuesto por el docente, se trata de que, en función de la operación y de los números en juego, elijan si van a resolverlo mentalmente, con un procedimiento personal, o si van a hacer la «cuenta» utilizando los algoritmos o la calculadora. En todos los casos, se promueve que revisen lo que obtienen y que interpreten su respuesta en el marco de la situación.

Para que el logro de esta finalidad de largo aliento sea posible, se debe promover tempranamente que los alumnos desarrollen diversas modalidades de cálculo (exacto, aproximado, mental, con papel y lápiz, con calculadora) y plantearles con frecuencia la actividad de elegir modalidades y eventualmente justificar la elección. Esta es la intención didáctica de las siguientes propuestas.

! Elegir cómo sumar

Para cada suma decidí si la podés resolver mentalmente o si te conviene hacer la cuenta.

100 + 85 =

237 + 49 =

184 + 128 =

517 + 3 =

150 + 150 =

210 + 220 =

Los pares de números propuestos han sido elegidos tendiendo a que haya casos firmemente candidatos a ser resueltos por cálculo mental («100 + 85») o con el algoritmo («184 + 128»), así como casos que aceptan uno u otro tratamiento («237 + 49», ya que puede ser pensado como «237 + 50 - 1» ó mediante el algoritmo)

De todos modos, para un alumno, un cálculo es susceptible de ser resuelto mentalmente si dispone de un cierto repertorio y ha tenido oportunidad de aprender a usarlo. En este sentido, no hay «reglas fijas» que nos permitan determinar a priori cuáles van a ser las decisiones de los alumnos. Por este motivo y para promover el análisis de los cálculos y la identificación de recursos, es importante provocar una puesta en común de las opciones realizadas y sus razones.

Cuando hablamos de articulación nos referimos precisamente al trabajo que realiza el docente, de indagación de lo que los alumnos tienen disponible, de promoción de su utilización y también de vuelta sobre los aspectos que, por lo menos algunos alumnos, no dominan.

Muchas veces hay alumnos que tratan de hacer el algoritmo sin escribir porque interpretan que esto es «cálculo mental». Se trata, en tal caso, de promover los recursos de cálculo mental con los que cuenta (para que pueda identificarlo) y también de alentar que, si el algoritmo le resulta adecuado, lo realice por escrito (precisamente porque el mismo se apoya en las reglas de escritura de la numeración).

En este sentido, tanto ante los alumnos como en la comunicación con los papás y otros adultos vinculados a los alumnos, resulta importante trabajar la idea de que un recurso de cálculo no es, en sí mismo, más «valioso» que otro, sino que se trata de elegir el más adecuado para el cálculo que se va a tratar.

Como hemos dicho, con cierta frecuencia, se debe plantear a los alumnos la actividad de tener que optar y pensar por qué elige una u otra modalidad de resolución.

¡ ¿Mentalmente?

Fijate para cada cálculo si lo podés resolver mentalmente o si te conviene escribir la cuenta en columna. Escribí una M al lado de los que podés resolver mentalmente y la cuenta en los demás.

500 + 250 = ☐	179 + 227 = ☐
420 + 365 = ☐	320 + 320 = ☐

Comparen en el equipo si todos eligieron los mismos cálculos para hacer la cuenta.

Tener que producir cálculos bajo ciertas condiciones es una buena oportunidad para pensar los criterios por los cuáles un tipo de tratamiento parece más adecuado que otro.

Se puede proponer que en cada equipo escriban algunos cálculos que piensan que se pueden resolver mentalmente y otros que creen que conviene resolver con el algoritmo. Luego intercambian sus propuestas con otro equipo, de quien reciben a su vez cálculos. Después de analizarlos y resolverlos, los equipos se reúnen para ver si fueron tratados como ellos pensaban y si están bien resueltos.

!

Escriban tres sumas que se puedan resolver mentalmente y cuyos resultados sean mayores que 400

Escribí tres sumas en las que convenga hacer la cuenta en columna y cuyos resultados sean menores que 700.

• ***Estimar***

!

En estas sumas más difíciles, es fácil equivocarse

Por eso resulta útil pensar aproximadamente cuál es el resultado antes de hacer la cuenta.

Elegí, en cada caso, el número que te parece más cercano al resultado.

189 + 214 = $\dfrac{300}{400}$ **290 + 481** = $\dfrac{600}{700}$ **257 + 218** = $\dfrac{500}{600}$

Discutan en el equipo si pueden saber, sin hacer la cuenta, si los resultados de las siguientes sumas son mayores o menores que 500.

410 + 99 =	410 + 99 =
349 + 281 =	349 + 281 =
217 + 256 =	217 + 256 =
89 + 387 =	89 + 387 =

Saber hacer las cuentas

Saber hacer las cuentas incluye tener maneras de controlar si un resultado puede ser o no el resultados de esa cuenta (que es una manera de revisar si cometieron errores).

El resultado de cada suma es uno de los números de la derecha. Antes de hacer la cuenta elegí el que te parece que corresponde.

	2.385		7.156
1.184 + 1.276 =	3.360	2.354 + 4.162 =	6.484
	2.460		6.516

¿Habías elegido bien el resultado?
Comenten en el equipo cómo hacen para elegir un resultado y rechazar otro.

Exacto o aproximado

En cada caso decidí si para responder hace falta realizar un cálculo exacto o si se puede contestar con un cálculo aproximado.

Para el casamiento de Juan y Cecilia los amigos juntaron $ 700. Quieren comprar una procesadora que cuesta $ 299 y un horno microondas que cuesta $ 460. ¿Les alcanza con la plata que juntaron?

A Julián le entregaron $ 1.000 para pagar cuentas de la oficina. Pagó $ 312 de Luz, $ 580 de Teléfono y $ 167 de Gas. Como tenía dinero propio en el bolsillo y se le mezcló con su plata, quiere saber si le alcanzó con $ 1.000 y si tiene que dar el vuelto o reclamar dinero.
El total pagado, ¿es menos de $ 1.000?
¿Tiene que dar vuelto o reclamar dinero?
En cada caso, ¿cuánto dinero?

Hemos planteado líneas de trabajo para articular desde la enseñanza y hemos presentado propuestas para cada una de ellas.

Somos conscientes de la complejidad de concebir y conducir la enseñanza en estos términos. Pero las múltiples experiencias realizadas con maestros en las aulas nos han dado oportunidad de compartir con ellos la alegría por los logros de los alumnos en el marco de una enseñanza así concebida.

Como hemos dicho, la articulación es necesaria en el proyecto del aula, pero también en el proyecto de la escuela, a lo largo de los ciclos. El repertorio de cálculos que presentamos a continuación puede constituir una referencia para el trabajo compartido entre docentes de distinto ciclo.

El repertorio de cálculos debería ir incluyendo, a lo largo del Primer y Segundo Ciclo[11], lo siguiente:

– Sumas de números de 1 cifra: por ejemplo «5 + 5»; «5 + 6»; etc.; restas asociadas a dichas sumas: «11 - 5»; «11 - 6»; etc.
– Identificación de descomposiciones aditivas del número 10, y de las restas asociadas a ellas; identificación de las descomposiciones aditivas del número 100 en números «redondos», y de las restas asociadas a ellas.
– Sumas de un número «redondo» de dos cifras más un número de una cifra: por ejemplo, «70 + 9»; restas vinculadas a dichas sumas: por ejemplo, «79 - 9».
– Suma o resta de 10 a un número cualquiera; luego, suma o resta de 100 a un número cualquiera; etc.
– Suma o resta de un número redondo a un número cualquiera.
– Otras descomposiciones aditivas de los números vinculadas con la organización del sistema de numeración. Por ejemplo, «2.000 + 500 + 40 + 6»; «800 + 7»; «200 + 19»; etc. Restas vinculadas a ellas: por ejemplo, «4.271 - 271»; «384 - 80»; etc.

11. Tomamos esta enumeración de contenidos de *Cálculo mental con números naturales*, *op. cit*. Los aspectos relativos a multiplicación son abordados en el Capítulo 4 de este libro.

– Cálculos de complementos de un número cualquiera respecto de un número «redondo» a través del análisis de las escrituras numéricas. Por ejemplo, ¿cuánto es necesario sumarle a 578 para obtener 600?
– Resultados de la tabla pitagórica para la multiplicación, y uso de esos conocimientos para conocer el cociente y el resto de dividendos menores que 100 y divisores de una cifra.
– Multiplicación por 10; 100; 1000, etc. División por 10, 100 1.000, etc.
– Descomposiciones multiplicativas de las escrituras numéricas y cálculos asociados a ella: por ejemplo «3 x 1.000 + 4 x 100 + 5 x 10 + 8»; etc.
– Extensión de los conocimientos sobre la tabla pitagórica a multiplicaciones con números «redondos» de más de una cifra. Por ejemplo «40 x 30»; «200 x 500»; «2.000 x 60»; etc.
– Extensión de los conocimientos sobre las divisiones a partir de los resultados de la tabla pitagórica y de la división por 10, 100, 1.000, etc., para resolver otras divisiones que involucran números «redondos» como dividendos y divisores.
– Identificación de múltiplos y divisores.